$\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+2\mathrm{arctg}(x-1)+C$.

e) Integrali racionalnih funkcija

Racionalnom funkcijom nazivamo izraz oblika $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdje su P(x) i Q(x) polinomi. Ako je stP(x)<stQ(x), tada racionalnu funkciju nazivamo pravilnom, u suprotnom –nepravilnom.

Dijeljenjem polinoma P(x) i Q(x) svaku nepravilnu racionalnu funkciju možemo predstaviti kao sumu polinoma i jedne pravilne racionalne funkcije. Kako se lako integrali dio koji je polinom, to ćemo se nadalje baviti samo dijelom koji je pravilna racionalna funkcija.

Sljedeće pravilne racionalne funkcije nazivamo prostim racionalnim funkcijama:

I. $\frac{1}{x-a}$, II. $\frac{1}{(x-a)^k}$, k=2,3..., III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, n=2,3... ,

pri čemu se pretpostavlja da su A, B, p i q realni brojevi i da je diskriminanta kvadratnog trinoma u slučajevima III i IV manja od nule.

Svaka pravilna racionalna funkcija se može predstaviti kao suma prostih racionalnih funkcija navedena 4 tipa. Neka je

$$Q_m(x)=(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdots\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{r_2}\cdots,$$

gdje su k_1, k_2.... r_1, r_2... prirodni brojevi i $a_i \neq a_j$ za i≠j. Tada je

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+....+\frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-a_2}+\frac{B_2}{(x-a_2)^2}+....+\frac{B_{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}}+...+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+...+\frac{B_{r_1}x+C_{r_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}}+$$

$$+\frac{R_1x+L_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{R_2x+L_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+...+\frac{R_{r_2}x+L_{r_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{r_2}}+... .$$

gdje su A_1, A_2 ..., B_1, B_2 ..., M_1, M_2 ... konstsnte koje se određuju metodom neodređenih koeficijenata.

Integrali od prostih pravilnih racionalnih funkcija:

- $\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C$,
- $\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$, $k>1$,
- $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\text{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$,
- $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{A}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^n}+C$, gdje

je $y=x+\frac{p}{2}$ i $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Za izračunavanje integrala $\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^n}$ koristi se rekurentna formula $\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^n}=\frac{1}{2(1-n)a^2}\cdot\frac{1}{(y^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^{n-1}}$, $n>1$.

Kod integraljenja pravilnih racionalnih funkcija $\frac{P(x)}{Q(x)}$ osnovni problem je njeno predstavljanje kao sume prostih racionalnih funkcija. U zavisnosti od toga kakve su nule polinoma Q(x), razlikujemo 4 slučaja, i to:

a) Korijeni realni i različiti. Tada je $Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ i

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+...+\frac{A_n}{x-x_n}.$$

b) Korijeni realni i među njima ima jednakih. Neka je x_1 nula polinoma Q(x) višestrukosti p, a ostale nule polinoma Q(x) su proste. Tada je $Q(x)=(x-x_1)^p(x-x_{p+1})\cdots(x-x_n)$ i

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{A_p}{(x-x_1)^p}+\frac{B_1}{x-x_{p+1}}+...+\frac{B_{n-p}}{x-x_n}.$$

c) Korijeni kompleksni i različiti. Neka su koeficijenti polinoma realni brojevi. Tada se kompleksne nule javljaju u parovima konjugovano-kompleksnih brojeva, tj. ako je $x_1 = \alpha + \beta i$ jedna nula, tada je druga nula $x_2 = \overline{x_1} = \alpha - \beta i$. Kako je $(x - x_1)(x - x_2) = (x-\alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q$, to je

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{M_2 x + N_2}{x^2 + p_2 x + q_2} + \ldots$$

d) Korijeni kompleksni i višestruki . Neka je $\alpha + \beta i$ nula polinoma $Q(x)$ višestrukosti p. Tada je $\alpha - \beta i$ takođe nula polinoma $Q(x)$ višestrukosti p. Sada je

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^2} + \ldots + \frac{M_p x + N_p}{\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^p} + \ldots .$$

Primjer 12. Razložiti funkciju $\dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$ na proste racionalne funkcije. Kako je $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2$, to je $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$. Dalje je $\dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \dfrac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$, odnosno $(A + C)x^3 + (A + B - C + D)x^2 + (A + B + C - D)x + (B + D) = 1$, odnosno A+C=0, A+B−C+D=0, A+B+C−D=0, B+D=1. Odavde slijedi da je $A = -\dfrac{1}{2}$, $B = C = D = \dfrac{1}{2}$, tj. $\dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-x+1}{x^2 - x + 1} + \dfrac{x+1}{x^2 + x + 1}\right)$.

Postoje integrali koji se pogodnom smjenom mogu svesti na integrale od racionalnih funkcija. Na primjer, integrali $\int R(\sin x, \cos x)dx$, gdje je R racionalna funkcija, se smjenom $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ svode na integrale od racionalne funkcije. Dovoljno je izvršiti smjene $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{i} \quad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Primjer 13. Naći $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$. Označimo sa I dati integral. Uvedimo smjenu $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$. Tada je $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ i $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Zamjenom u integral I dobijamo da je $I = \displaystyle\int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2}$. Dalje je $I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \text{---} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\frac{3\cdot\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C$.

Integrali oblika $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ se smjenom $x+\frac{b}{2a}=t$ svode na (sumu integrala):

$A\int \frac{tdt}{\sqrt{at^2+m}}+B\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}$. Prvi integral se rješava metodom smjene promjenljivih, a drugi se svodi na tablični integral.

Primjer 14. Naći $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$. Kako je $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$, to poslije smjene t=x+2 dobijamo da je $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = \int \frac{2t-3}{\sqrt{t^2+1}}dt = 2\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}-3\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$

$2\sqrt{t^2+1}-3\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=2\sqrt{x^2+4x+5}-3\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$.

6.2. ODREĐENI INTEGRAL

a) Definicija određenog integrala

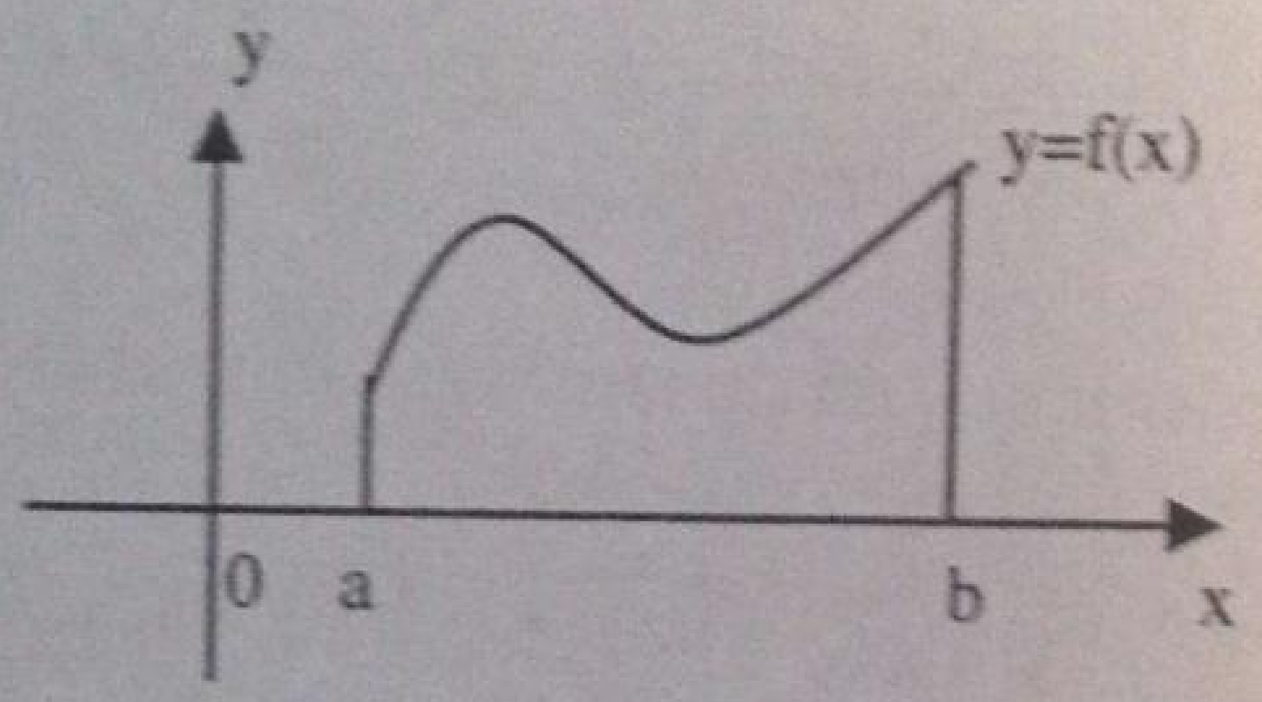
Neka je funkcija f(x) definisana na odsječku [a,b]. Odsječak [a,b] tačkama $a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}$, $x_n = b$ ($x_k < x_{k+1}$) podijelimo na n dijelova. U svakom od odsječaka $[x_{k-1}, x_k]$ izaberimo po tačku ξ_k, k=1,2,...,n. Sumu $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, gdje je $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, nazivamo integralnom sumom funkcije f(x) na odsječku [a,b].

Definicija 1. Određenim integralom od funkcije f(x) na odsječku [a,b] nazivamo graničnu vrijednost integralnih suma S_n (ako postoji) pod uslovom da dužina najvećeg od odsječaka Δx_k teži nuli kada $n \to +\infty$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max_k \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k . \qquad (1)$$

Ako je funkcija f(x) neprekidna na odsječku [a,b], tada granična vrijednost (1) postoji i ne zavisi od načina razbijanja odsječka [a,b] niti od izbora tačaka ξ_k iz odsječka $[x_{k-1},x_k]$. Za funkciju f(x) za koju postoji granična vrijednost (1) kažemo da je integrabilna na odsječku [a,b]. Očigledno, svaka neprekidna funkcija na odsječku [a,b] je i integrabilna na tom odsječku.

Ako je funkcija f(x) neprekidna na odsječku [a,b] i $f(x)\geq 0$ za $x\in[a,b]$, tada $\int_a^b f(x)dx$ predstavlja površinu krivolinijskog trapeza ograničenog osom Ox, pravama x=a i x=b i lukom krive y=f(x), $x\in[a,b]$ (sl 1)



sl 1

b) Svojstva određenog integrala (f,g∈C[a,b])

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, 2. $\int_a^a f(x)dx = 0$, 3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$,
4. $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$, 5. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$,
6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (a<c<b),
7. ($f(x)\geq 0$, $x\in[a,b]$)$\Rightarrow$($\int_a^b f(x)dx \geq 0$), ($f(x)\leq 0$, $x\in[a,b]$)$\Rightarrow$($\int_a^b f(x)dx \leq 0$),
8. ($f(x)\leq g(x)$, $x\in[a,b]$)$\Rightarrow$($\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$),
9. Ako je M najveća i m najmanja vrijednost funkcije f(x) na odsječku [a,b], tada je

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

10. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, $c\in[a,b]$ (teorema o srednjoj vrijednosti)

$$11.\ \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \qquad 12.\ \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

Za integraciju parnih ili neparnih funkcija, sa simetričnim u odnosu na nulu granicama integracije, važi:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{ako je } f(x) \text{ parna funkcija} \\ 0, & \text{ako je } f(x) \text{ neparna funkcija} \end{cases}.$$

c) Njutn-Lajbnicova (I. Newton, G. W. Leibniz) formula

Ako je funkcija f(x) neprekidna na odsječku [a,b], tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

gdje je F(x) primitivna funkcija funkcije f(x) (Njutn-Lajbnicova formula).

Primjer 1. Naći : a) $\int_0^1 (x^2 - 2x + 4)dx$, b) $\int_0^{\pi} (2\cos x - 3\sin x)dx$, c) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 + x}$.

Rješenje. a) $\int_0^1 (x^2 - 2x + 4)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right)\Big|_0^1 = \frac{10}{3}$.

b) $\int_0^{\pi} (2\cos x - 3\sin x)dx = (2\sin x + 3\cos x)\Big|_0^{\pi} = -6.$

c) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 + x} = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^3 = \ln\frac{3}{2}$.

d) Metode integracije određenih integrala

Metoda smjene promjenljivih

Neka je za izračunavanje $\int_a^b f(x)dx$ od neprekidne funkcije f(x) na odsječku [a,b] uvedena smjena $x=\varphi(t)$, $\varphi(t)$ –monotona funkcija. Ako su funkcija $\varphi(t)$ i njen izvod $\varphi'(t)$ neprekidne na odsječku $[\alpha,\beta]$, pri čemu je $a=\varphi(\alpha)$ i $b=\varphi(\beta)$, tada je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

(Ovu formulu nazivamo formulom smjene promjenljivih u određenom integralu)

Primjer 2. Naći:

a) $\int_0^1 \sqrt{2+x}dx$, b) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 xdx$, c) $\int_2^5 \frac{dx}{2x+3}$, d) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+6x+10}$, e) $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^3-x}dx$.

Rješenje. a) $\int_0^1 \sqrt{2+x}dx = \begin{pmatrix} 2+x=t, dx=dt \\ x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=1 \Rightarrow t=3 \end{pmatrix} = \int_2^3 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right).$

b) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 xdx = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\cos xdx = \begin{pmatrix} \sin x = t, \cos xdx = dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\pi/2 \Rightarrow t=1 \end{pmatrix} = \int_0^1 (1-t^2)dt = \frac{2}{3}.$

c) $\int_2^5 \frac{dx}{2x+3} = \begin{pmatrix} 2x+3=t, 2dx=dt \\ x=2 \Rightarrow t=7 \\ x=5 \Rightarrow t=13 \end{pmatrix} = \int_7^{13} \frac{dt}{t} = \ln\frac{13}{7}.$

d) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int_1^3 \frac{dx}{(x+3)^2+1} = \begin{pmatrix} x+3=t, dx=dt \\ x=1 \Rightarrow t=4 \\ x=3 \Rightarrow t=6 \end{pmatrix} = \int_4^6 \frac{dt}{t^2+1} = \text{arctg}6 - \text{arct}4 = \text{arctg}0.08 .$

Napomena. $\text{tg}(\text{arctg}6 - \text{arctg}4) = \frac{6-4}{1+6\cdot 4} = 0.08$, $\text{arctg}6 - \text{arct}4 = \text{arctg}0.08$).

e) Kako je $\frac{x^2+1}{x^3-x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$, to je $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^3-x}dx = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \ln\frac{16}{9}.$

Primjer 3. Naći: a) $\int_1^{16} \frac{dx}{x+\sqrt[4]{x}}$, b) $\int_2^3 \frac{x^2dx}{(x+1)^3}$, c) $\int_1^2 3x(1-x)^{17}dx$.

Rješenje. a) $\frac{4}{3}\ln\frac{9}{2}$. Uputstvo. Uvesti smjenu $x=t^4$ a zatim smjenu $u=t^3$.

b) $\ln\frac{4}{3} - \frac{131}{288}$. Uputstvo. $\frac{x^2}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$, uvesti smjenu $x+1=t$.

c) $-\frac{37}{114}$. Uputstvo. Uvesti smjenu $1-x=t$.

Primjer 4. Koji je od integrala veći:

a) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos xdx$ ili $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^2 xdx$, b) $\int_1^{10} x^5 dx$ ili $\int_1^{10} x^6 dx$?

Rješenje. a) Kako je $\cos x > \cos^2 x$ za $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, to je $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x dx > \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos^2 x dx$.

b) $\int_1^{10} x^5 dx < \int_1^{10} x^6 dx$, jer je $x^5 < x^6$ za $x \in [1,10]$.

Primjer 5. Ne izračunavajući integral $\int_2^3 (x^2 - 5x + 4) dx$ odrediti njegov znak.

Rješenje. Kako je $x^2 - 5x + 4 < 0$ za $x \in [2,3]$, to je $\int_2^3 (x^2 - 5x + 4) dx < 0$.

Metoda parcijalne integracije

Ako funkcije u(x) i v(x) imaju neprekidne izvode na odsječku [a,b], tada je

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

(Ovu formulu nazivamo formulom parcijalne integracije u određenom integralu)

Primjer 6. Naći: a) $\int_{-1}^0 x e^{-x} dx$, b) $\int_0^2 \ln(x^2 + 4) dx$, c) $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$, d) $\int_0^9 e^{\sqrt{x}} dx$.

Rješenje. a) $\int_{-1}^0 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^{-x} dx = 1$.

b) $\int_0^2 \ln(x^2 + 4) dx = x \ln(4 + x^2) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2}{4 + x^2} dx = 6 \ln 2 - 2\left(\int_0^2 dx - 4 \int_0^2 \frac{dx}{4 + x^2} \right) = 6 \ln 2 - 4 + \pi$.

c) $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = x^2 \sqrt{1+x^2} \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 x\sqrt{1+x^2} dx = 4\sqrt{5} - \int_1^5 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{5})$ .Smjena. $1 + x^2 = t$.

d) Označimo sa I dati integral.Smjenom $x = t^2$ dobijamo da je $I = 2\int_0^3 t e^t dt = 2\left(t e^t \Big|_0^3 - \int_0^3 e^t dt \right)$

$= 2(2e^3 + 1)$.

c) Nesvojstveni integrali

Integrali kojima smo se do sada bavili bili su uvijek integrali ograničenih funkcija na konačnim odsječcima. Takvi integrali se još nazivaju svojstveni ili Rimanovi integrali (B.Riemann). Sada ćemo razmotriti integrale od funkcija koje su neograničene na oblasti integracije ili je oblast integracije beskonačna.

- Nesvojstveni integral sa beskonačnim granicama (ili I vrste) definiše se na sljedeći način:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$$

gdje je c proizvoljnji realni broj (obično je c=0).

Primjer 7. Naći: a) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$, b) $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$, c) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Rješenje. a) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4} = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^4} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3x^3}\Big|_{1}^{b}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3b^3}\right) = \frac{1}{3}$.

b) $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\left(e^x\Big|_{a}^{0}\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(1-e^a\right) = 1$.

c) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_{a}^{0}\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{b}\right) =$

$\lim_{a\to-\infty}\left(0-\operatorname{arctg}a\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}b - 0\right) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$.

Nesvojstveni integral I vrste nazivamo konvergentnim, ako postoji konačna granična vrijednost koja se nalazi na desnoj strani jednakosti. Ako ta granična vrijednost ne postoji, tada integral nazivamo divergentnim.

- Ako je funkcija f(x) neprekidna u intervalu [a,b) pri čemu u tački x=b ima prekid druge vrste, tada se nesvojstveni integral od neograničene funkcije (II vrste) definiše na sljedeći način:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

- Ako gornja granična vrijednost postoji, tada nesvojstveni integral II vrste nazivamo konvergentnim, u suprotnom -divergentnim. Slično, ako funkcija f(x) ima u tački x=a prekid II vrste: $\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$ (ili $-\infty$), tada je po definiciji

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

- Ako funkcija f(x) ima prekid II vrste u unutrašnjoj tački c odsječka [a,b], tada je po definiciji

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to\varepsilon\to+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx .$$

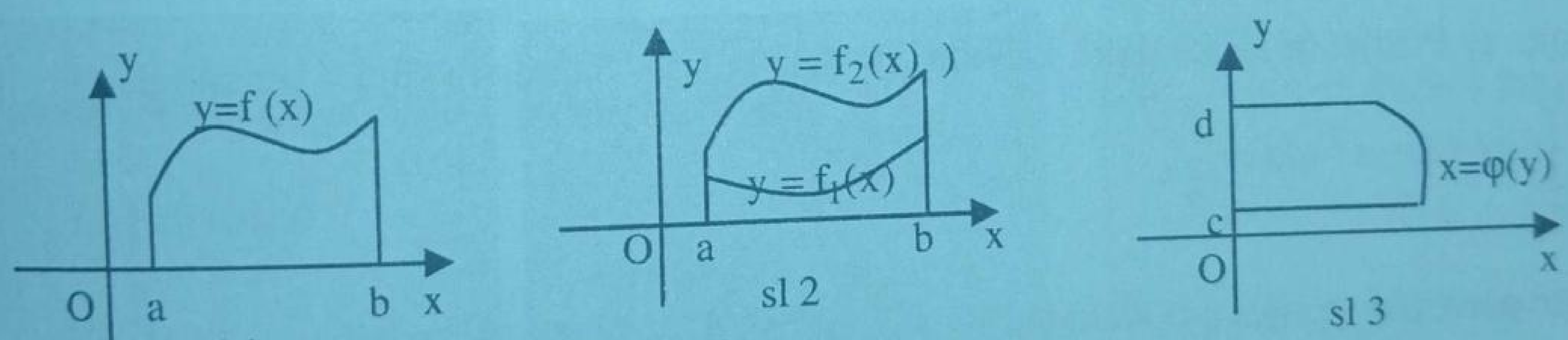
6.3. PRIMJENE ODREĐENOG INTEGRALA U GEOMETRIJI

a) Izračunavanje površine ravnih figura

Izračunavanje površina ravnih figura zasnovano je na geometrijskom smislu određenog integrala.

- Površina krivolinijskog trapeza, ograničenog sa gornje strane grafikom funkcije $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$, sa lijeve i desne strane pravama $x=a$ i $x=b$, odozdo odsječkom $[a,b]$ ose Ox (sl 1) izračunava se po formuli

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$



sl 1 sl 2 sl 3

- Ako je $f(x)\leq 0$ za $x\in[a,b]$, tada je

$$S = -\int_a^b f(x)dx . \qquad (2)$$

Formule (1) i (2) mogu se objediniti u jednu formulu

$$S = \int_a^b |f(x)|dx . \qquad (3)$$

- Specijalno, ako se kriva $y=f(x)$ u intervalu (b,c) nalazi ispod ose Ox, a na inetrvalima (a,c) i (c,d) iznad ose Ox, tada je površina lika kojeg gradi kriva $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ sa osom Ox izračunava po formuli

$$S = \int_a^b f(x)dx + \left|\int_b^c f(x)dx\right| + \int^d f(x)dx .$$

- Površina figure, ograničene krivama $y=f_1(x)$ i $y=f_2(x)$, pri čemu je $f_1(x)\leq f_2(x)$, $x\in[a,b]$, pravama $x=a$ i $x=b$ (sl 2) računa se po formuli

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx \,.$$

- Ako je krivolinijski trapez ograničen krivom x=φ(y), pravama y=c, y=d i odsječkom [c,d] ose Oy (sl 3), tada se njegova površina računa po formuli

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy \,.$$

- Ako je krivolinijski trapez ograničen sa gornje strane krivom zadatom parametarskim jednačinama $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $y(t) \geq 0$, $t \in [t_1, t_2]$, pravama x=a i x=b i odsječkom [a,b], tada se površina trapeza računa po formuli

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt \,,$$

gdje su t_1 i t_2 rješenja jednačina $a = x(t_1)$ i $b = x(t_2)$.

Primjer 1. Izračunati površinu figure ograničene linijama :

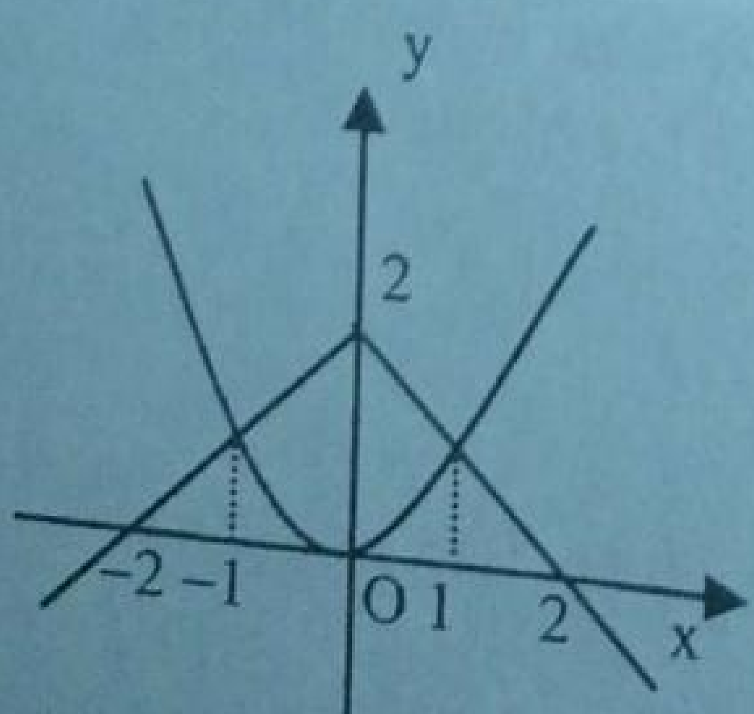
a) $y = 2 - |x|$ i $y = x^2$, b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$ i $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$, c) $y = x^3 - 3x$ i y=x.

Rješenje. a) Presječne tačke datih krivih su:(−1,1) i (1,1). Saglasno slici 4 imamo da je $P = 2\int_0^1 (-x + 2 - x^2)dx = \frac{7}{3}$.

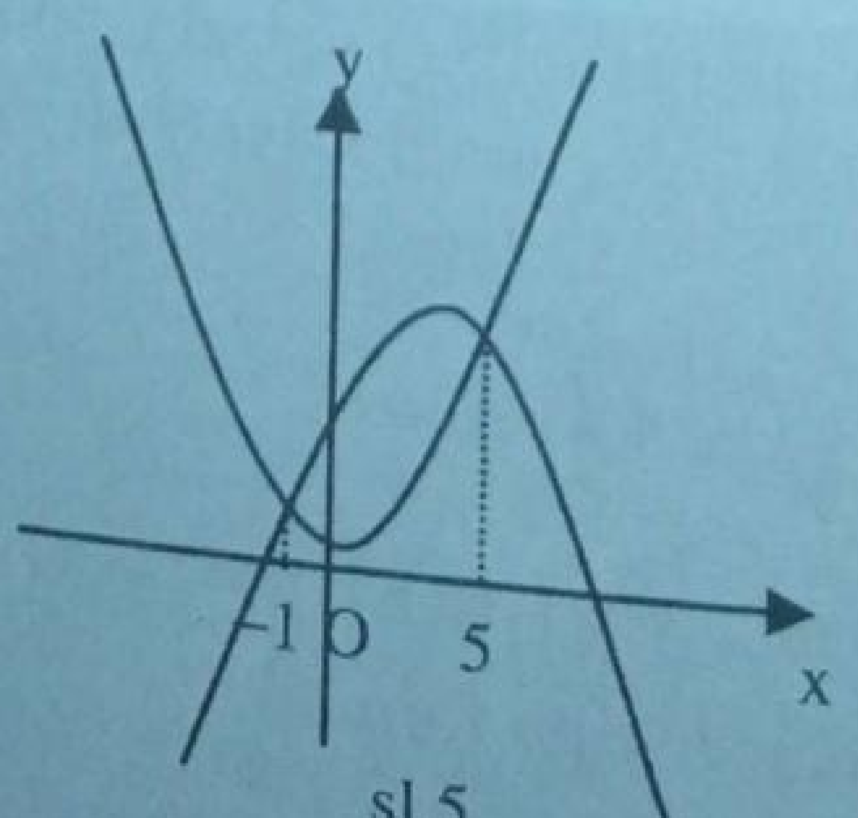
b) Date parabole se sijeku u tačkama $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ i $\left(5, \frac{17}{2}\right)$. Saglasno slici 5 imamo da je

$$P = \int_{-1}^{5} (-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1)dx \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)dx = 36 \,.$$

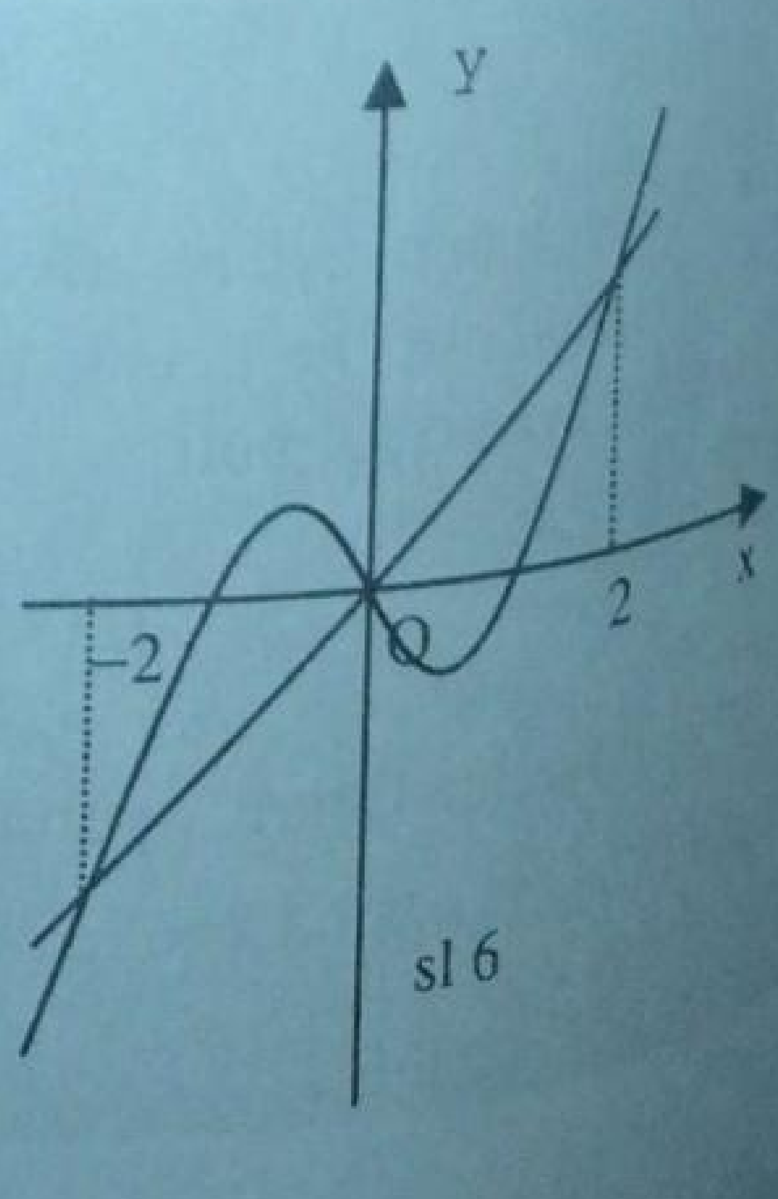
c) Presječne tačke date krive i prave y=x su (−2,−2), (0,0), (2,2). Saglasno slici 6 imamo da je $P = 2\int_0^2 (x - x^3 + 3x)dx = 8$.



sl 4



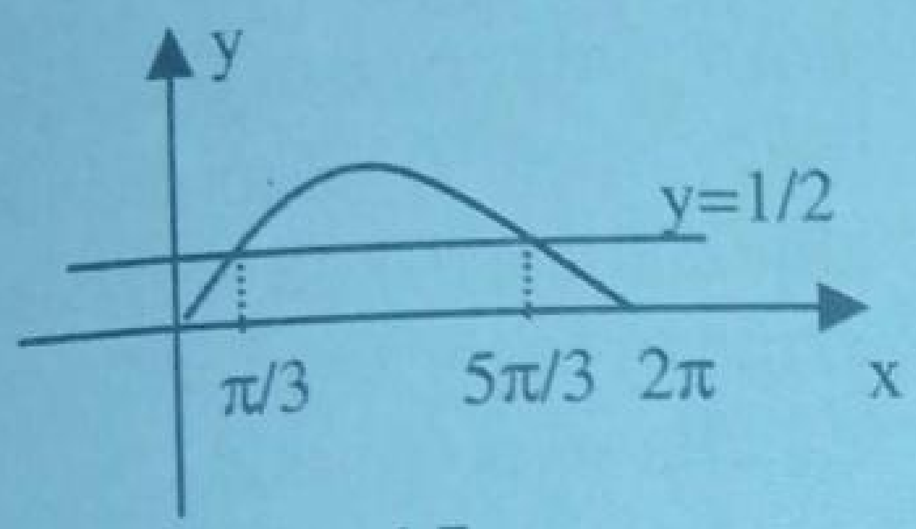
sl 5



sl 6

Primjer 2. Naći površinu ograničenu jednim lukom cikloide: x=t−sint, y=1−cost, $0\le t\le 2\pi$ i pravom $y=\frac{1}{2}$.

Rješenje. Kako je $1-\cos t=\frac{1}{2}$ za $t=\frac{\pi}{3}$ i $t=\frac{5\pi}{3}$, to je saglasno slici 7:



sl 7

$$P=2\int_{\pi/3}^{5\pi/3} y(t)x'(t)dt-\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{5\pi/3}dx=2\int_{\pi/3}^{5\pi/3}\left((1-\cos t)^2-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{4\pi}{3}+\frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

b) Izračunavanje dužine luka krive

Neka je u ravni zadata kriva jednačinom y=f(x) ili x=φ(y). Na krivoj su izabrane dvije tačke A(a,c) i B(b,d). Dužina L luka krive od tačke A do tačke B računa se po formuli

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx \text{ ili } L=\int_c^d\sqrt{1+(x')^2}dy.$$

Ako je kriva zadata parametarskim jednačinama $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, $t_1\le t\le t_2$, tada se dužina luka krive računa po formuli

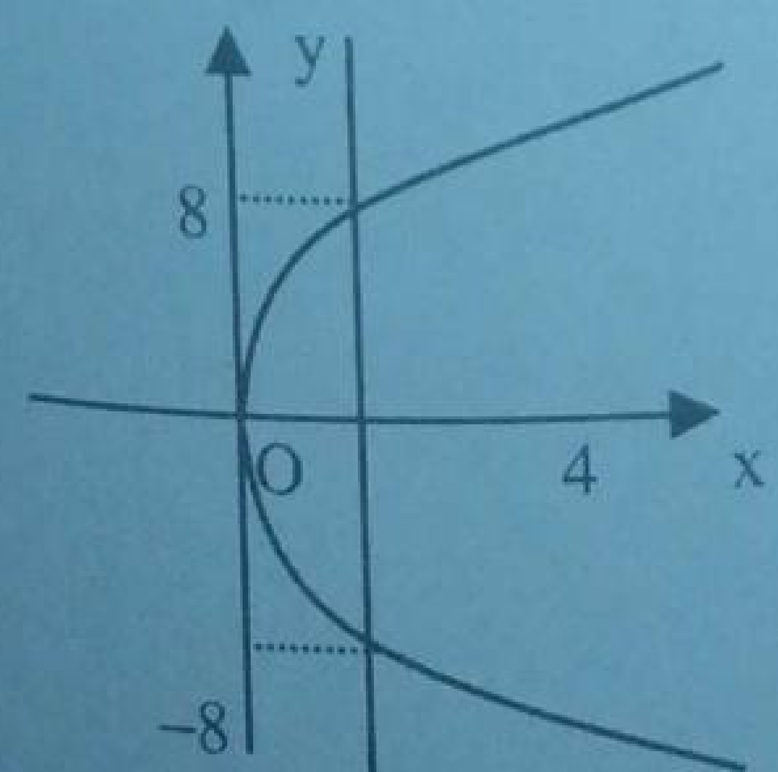
$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2(t)+(y')^2(t)}dt.$$

Primjer 3. Naći obim kružnice poluprečnika R.

Rješenje. Jednačinu kružnice $x^2+y^2=R^2$ napišimo u parametarskom obliku. Dobijamo da je x=Rcost, y=Rsint, $0\le t\le 2\pi$. Neka je L obim date kružnice . Zbog simetričnosti kružnice u odnosu na koordinatne ose imamo da je $L=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{R^2\sin^2t+R^2\cos^2t}\,dt=4R\int_0^{\pi/2}dt=2\pi R$.

Primjer 4. Naći dužinu luka krive $y^2=16x$ koji odsijeca prava x=4.

Rješenje. Izračunavanje dužine traženog luka će se pojednostaviti ako posmatramo x=x(y), a ne y=y(x). Prema slici 8 imamo da je $L=2\int_0^8\sqrt{1+[x'(y)]^2}dy=$



sl 8

$$2\int_0^8\sqrt{1+\left(\frac{y}{8}\right)^2}dy=2\int_0^8\sqrt{1+\left(\frac{y}{8}\right)^2}dy=16\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt=$$

$$8(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})).$$